Beweis des über eine Vermutung gefundenen außerordentlichen Theorems über die Integration der Formel $\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{(1+aa-2a\cos\varphi)^{n+1}}$ *

Leonhard Euler

§1 Nachdem ich neulich diese Integralformel betrachtet hatte und hauptsächlich nach ihrem Wert gesucht hatte, welchen sie annimmt, wenn das Integral von der Grenze $\varphi = 0$ bis hin zur Grenze $\varphi = 180^\circ$ erstreckt wird, habe ich aus den vielen Fällen, welche sich entwickeln ließen, gefolgert, dass ihr Integral im Allgemeinen so ausgedrückt hervorgehen wird

$$\frac{\pi a^i}{(1-aa)^{2n+1}}V,$$

wo V die Summe dieser Reihe bezeichnet

$$V = \left(\frac{n-i}{0}\right)\left(\frac{n+i}{i}\right) + \left(\frac{n-i}{1}\right)\left(\frac{n+i}{i+1}\right)a^2 + \left(\frac{n-i}{2}\right)\left(\frac{n+i}{i+2}\right)a^4 + \text{etc.}$$

Hier bedeuten diese Symbole in Klammern die Binomialkoeffizienten, während wir

*Originaltitel: "Demonstratio theorematis insignis per coniecturam eruti circa intagrationem formulae $\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{(1+aa-2a\cos\varphi)^{n+1}}$", zuerst publiziert in: *Institutionum calculi integralis, Band 4* (1794, verfasst 1778): pp. 242–256, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 19, pp. 197 – 216, Eneström-Nummer E674, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \binom{m}{4} x^4 + \text{etc.}$$

setzen.

§2 Über diese Integralformel ist aber vor allem festzuhalten, dass der Buchstabe i stets ganze Zahlen bezeichnet, weil ja in der Analysis durchgehend angenommen wird, dass im Fall $\varphi = 180^\circ$ immer $\sin i\varphi = 0$ ist; aber dann können seine Werte auch stets als positiv angesehen werden, weil

$$\cos(-i\varphi) = \cos(+i\varphi)$$

ist. Dennoch werden wir indes bald zeigen, dass unsere Integralformel auch mit der Wahrheit verträglich ist, wenn dem Buchstaben i negative Werte zugeteilt werden. Um dies zu zeigen, sind über die zur Hilfe genommenen Symbole die folgenden Dinge zu bemerken.

1. Wenn p und q ganze und p freilich eine positive Zahl bezeichnen, weil in der Entwicklung der Potenz des Binoms alle dem ersten vorausgehenden Terme Null sind, wird, sofern q eine negative Zahl war, immer $\binom{p}{q} = 0$ sein.

2. Weil der Koeffizient so des ersten wie des letzten Terms immer die Einheit ist, wird so $\binom{p}{0} = 1$ wie $\binom{p}{p} = 1$ sein.

3. Weil die dem letzten folgenden Terme gleichermaßen Null sind, wird, sooft $q > p$ war, der Wert dieses Symbols $\binom{p}{q}$ immer für Null gehalten werden können.

4. Weil in der Entwicklung der Potenz des Binoms die Koeffizienten eine retrograde Struktur haben, folgt daraus, dass immer $\binom{p}{q} = \binom{p}{p-q}$ sein wird. Wenn aber die obere Zahl p negativ war, wird wegen des vorhergehenden Grundes immer auch $\binom{-p}{-q} = 0$ sein.

5. Aber wenn q positive Zahlen bezeichnet, wird das Symbol $\binom{-p}{q}$ immer abwechselnd positive und negative Werte geben, weil

$$\binom{-p}{0} = 1, \quad \binom{-p}{1} = -p, \quad \binom{-p}{2} = +\frac{p(p+1)}{1\cdot 2}, \quad \binom{-p}{3} = -\frac{p(p+1)(p+2)}{1\cdot 2\cdot 3} \quad \text{etc.}$$

gilt. Und daher

6. Im Allgemeinen werden solche Symbole, wo die obere Zahl negativ ist, auf positive zurückgeführt werden können, weil $\left(\frac{-p}{q}\right) = \pm\left(\frac{p+q-1}{q}\right)$ ist, wo das Vorzeichen $+$ gilt, wenn q eine gerade Zahl war, das untere $-$ hingegen, wenn es ungerade war.

§3 Nachdem diese Eigenschaften über die hier verwendeten Charaktere bemerkt worden sind, wollen wir in unsere Integralform $-i$ anstelle von i schreiben und es wird

$$\int \frac{\partial\varphi \cos(-i\varphi)}{(1+aa-2a\cos\varphi)^{n+1}} = \frac{\pi a^{-i}}{(1-aa)^{2n+1}}V$$

sein, mit

$$V = \left(\frac{n+i}{0}\right)\left(\frac{n-i}{-i}\right) + \left(\frac{n+i}{1}\right)\left(\frac{n-i}{-i+1}\right)a^2 + \left(\frac{n+i}{2}\right)\left(\frac{n-i}{-i+2}\right)a^4$$
$$+\left(\frac{n+i}{3}\right)\left(\frac{n-i}{-i+3}\right)a^6 + \text{etc.},$$

wo die zweiten Faktoren verschwinden, solange die Nenner negativ sind; das erste eine Bedeutung tragende Glied wird also

$$\left(\frac{n+i}{i}\right)\left(\frac{n-i}{-i+i}\right)a^{2i}$$

sein; sein Wert wird also

$$\left(\frac{n+i}{i}\right)a^{2i}$$

sein; die folgenden Glieder werden aber

$$\left(\frac{n+i}{i+1}\right)\left(\frac{n-i}{-i+i+1}\right)a^{2i+2} = \left(\frac{n+i}{i+1}\right)\left(\frac{n-i}{1}\right)a^{2i+2}$$

sein, dann aber

$$\left(\frac{n+i}{i+2}\right)\left(\frac{n-i}{2}\right)a^{2i+4} \quad \text{etc.}$$

Auf diese Weise wird also

$$V = a^{2i}\left(\binom{n+i}{i}\binom{n-i}{0} + \binom{n+i}{i+1}\binom{n-i}{1}a^2 + \binom{n+i}{i+2}\binom{n-i}{2}a^4 + \text{etc.}\right)$$

sein, welcher Wert mit

$$\frac{\pi a^{-i}}{(1-aa)^{2n+1}}$$

multipliziert diese Form liefert

$$\frac{\pi a^{i}}{(1-aa)^{2n+1}}\left(\binom{n+i}{i}\binom{n-i}{0} + \binom{n+i}{i+1}\binom{n-i}{1}a^2 + \binom{n+i}{i+2}\binom{n-i}{2}a^4 + \text{etc.}\right),$$

welcher vollkommen mit unserer dem positiven Wert von i entsprechenden Formel übereinstimmt, welche außerordentliche Übereinstimmung ein nicht zu verachtender Grundstein für die Gültigkeit unserer Integralform ist.

§4 Außerdem muss aber über unsere Integralformel besonders bemerkt werden, dass die oben für V gegebene Reihe immer irgendwo abbricht, sooft n eine ganze positive Zahl war, was natürlich passieren wird, wannimmer entweder im ersten Faktor, dessen Form $\binom{n-i}{\lambda}$ ist, zu einem Term gelangt wird, in dem $\lambda > n-i$ ist, oder im zweitem Faktor, dessen Form $\binom{n+i}{i+\lambda}$ ist, $\lambda > n$ werden wird; diese Eigenschaft ist umso mehr zu bemerken, weil, wenn die Reihe V bis ins Unendliche liefe, wir kaum etwas gewännen, was besonders über die Fälle anzumerken ist, in denen n eine gebrochene Zahl ist, welche Fälle wir also gänzlich aus unserer Untersuchung herausnehmen wollen, sodass wir für n nur ganze Zahlen annehmen werden.

§5 Weil wollen also auch die Fälle betrachten, in denen n eine negative Zahl ist, und zuerst ist freilich per se klar, solange sie kleiner war als i und daher $n+i$ immer noch eine positive Zahl ist, dass dann die für V gegebene Reihe sogar schneller abbrechen wird; sie wird also erst dann ins Unendliche laufen, wannimmer auch $n+i$ eine negative Zahl war. In diesen Fällen kann aber die oben gegebene Integralform so transformiert werden, dass der Abbruch gleichermaßen stattfindet.

§6 Um dies zu zeigen, wollen wir $n = -m - 1$ setzen, dass unsere Integralformel

$$\int \partial\varphi \cos i\varphi (1 + aa - 2a\cos\varphi)^m$$

und ihr Wert also

$$= \pi a^i (1 - aa)^{2m+1} V$$

wird, während nun gilt

$$V = \binom{-m-1-i}{0}\binom{-m-1+i}{i} + \binom{-m-1-i}{1}\binom{-m-1+i}{i+1} a^2$$
$$+ \binom{-m-1-i}{2}\binom{-m-1+i}{i+2} a^4 + \binom{-m-1-i}{3}\binom{-m-1+i}{i+3} a^6 + \text{etc.},$$

welche Reihe offensichtlich bis ins Unendliche läuft, welche wir aber mithilfe des folgenden Lemmas transformieren können werden.

LEMMA

§7 *Diese über die hier eingeführten Symbole laufende Reihe*

$$♄ = \binom{f}{0}\binom{h}{e} + \binom{f}{1}\binom{h}{e+1} x + \binom{f}{2}\binom{h}{e+2} x^2 + \binom{f}{3}\binom{h}{e+3} x^3 + etc.$$

kann in diese ihr ähnliche transformiert werden

$$♂ = \binom{-h-1}{0}\binom{-f-1}{e} + \binom{-h-1}{1}\binom{-f-1}{e+1} x + \binom{-h-1}{2}\binom{-f-1}{e+2} x^2 + \text{etc.},$$

weil ja zwischen deren Werten ♄ und ♂ diese Relation vor nicht allzu langer Zeit von mir bewiesen worden ist immer zu bestehen

$$\binom{e+f}{e} ♄ = \binom{e-h-1}{e} (1-x)^{f+h+1} ♂,$$

deren Beweis von sehr großem Umfang ist, während er sogar über Differentialgleichung zweiten Grades verläuft.

§8 Wir wollen dieses Lemma nun auf den uns vorgelegten Fall anwenden, und damit die Reihe ♄ mit unserem V in Übereinstimmung gebracht wird, dass ♄ $= V$ wird, muss $f = -m-1-i$, $h = -m-1+i$, $e = i$ und $x = aa$ genommen werden, woher die andere Reihe ♂ diese Form annehmen wird

$$♂ = \binom{m-i}{0}\binom{m+i}{i} + \binom{m-i}{1}\binom{m+i}{i+1}aa + \binom{m-i}{2}\binom{m+i}{i+2}a^4 + \text{etc.},$$

welche Reihe nun gewiss irgendwo abbricht, weil hier m eine ganze positive Zahl bezeichnet; aber die Relation zwischen der obigen $V =$ ♄ und dieser neuen Reihe ♂ wird sich so verhalten

$$\binom{m-1}{i}V = \binom{m}{i}(1-aa)^{2m-1}♂.$$

§9 Daher ist der Wert unserer Integralformel dieser

$$\int \partial\varphi \cos i\varphi (1+aa-2a\cos\varphi)^m = \frac{\binom{m}{i}\pi a^i ♂}{\binom{-m-i}{i}},$$

wo ♂ die gerade zuvor in § 7 dargelegte Reihe bezeichnet, welcher Wert, weil sie den Faktor $\binom{m}{i}$ hat, immer verschwinden wird, solange $i > m$ war, sodass in diesen Fällen der Wert des Integrals immer Null ist. Überdies wird es förderlich sein, hier bemerkt zu haben, dass nach der Entwicklung

$$\binom{m}{i} : \binom{-m-1}{i} = \pm\frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)}{(m+1)(m+2)\cdots(m+i)}$$

ist, wo das obere Vorzeichen $+$ gilt, wenn i eine gerade Zahl war, das untere $-$ hingegen, wenn eine ungerade. Nachdem diese Dinge über die Natur unseres Theorems angemerkt worden sind, wollen wir seinen Beweis angehen, welchen wir, damit er klarer wird, in verschiedene Teile aufteilen.

Erster Teil des Beweises

§10 Weil wir ja unseren Integralwert auf zwei Formeln angewandt haben, wollen wir sie der Kürze wegen mit den Zeichen ☉ und ☾ anzeigen und es sei

$$☉ = \int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{(1+aa-2a\cos\varphi)^{n+1}} \begin{bmatrix} \text{von} & \varphi = 0 \\ \text{bis} & \varphi = 180^\circ \end{bmatrix}$$

$$☾ = \int \partial\varphi \cos i\varphi (1 + aa - 2a\cos\varphi)^m \begin{bmatrix} \text{von} & \varphi = 0 \\ \text{bis} & \varphi = 180^\circ \end{bmatrix},$$

deren zweite ☾ in die erste ⊙ umgewandelt wird, wenn wir $-n-1$ anstelle von m schreiben; gerade haben wir aber gesehen, dass diese zwei Formeln voneinander abhängen, woher wir von der zweiten als einfacheren, weil sie freilich frei vom Nenner $(1-aa)^{2n+1}$ ist, aus anfangen wollen; um diese zu vereinfachen, wollen wir

$$\frac{a}{1+aa} = b$$

setzen; so werden wir nämlich

$$☾ = (1+aa)^m \int \partial\varphi \cos i\varphi (1 - 2b\cos\varphi)^m$$

haben, deren Integral wir also ausfindig zu machen haben werden.

§11 Es wird aber vor allem förderlich sein die Potenz $(1-2b\cos\varphi)^m$ zu entwickeln, woher

$$(1-2b\cos\varphi)^m = 1 - \left(\frac{m}{1}\right) 2b\cos\varphi + \left(\frac{m}{2}\right) 4b^2\cos^2\varphi - \left(\frac{m}{3}\right) 8b^3\cos^3\varphi + \text{etc.}$$

werden wird, deren allgemeiner Term also

$$\pm \left(\frac{m}{\lambda}\right) 2^\lambda b^\lambda \cos^\lambda \varphi$$

sein wird, wo das Zeichen $+$ gilt, wenn λ eine gerade Zahl war, das andere $-$ hingegen, wenn eine ungerade. Nun, weil hier die Potenzen von $\cos\varphi$ auftauchen, müssen sie nach den hinreichend bekannten Lehren in einfache Kosinus umgewandelt werden, mit welchen dann gilt:

$$2^2 \cos^2 \varphi = 2\cos 2\varphi + 1\binom{2}{1},$$

$$2^3 \cos^3 \varphi = 2\cos 3\varphi + 2\binom{3}{1}\cos\varphi,$$

$$2^4 \cos^4 \varphi = 2\cos 4\varphi + 2\binom{4}{1}\cos 2\varphi + 1\binom{4}{2},$$

$$2^5 \cos^5 \varphi = 2\cos 5\varphi + 2\binom{5}{1}\cos 3\varphi + 2\binom{5}{2}\cos\varphi,$$

$$2^6 \cos^6 \varphi = 2\cos 6\varphi + 2\binom{6}{1}\cos 4\varphi + 2\binom{6}{2}\cos 2\varphi + 1\binom{6}{3},$$

etc.

Dort ist zu bemerken, dass bei den geraden Potenzen das letzte Glied $\cos 0\varphi = 1$ mit dem halbieren Koeffizienten behaftet ist. Daher wird also im Allgemeinen

$$2^\lambda \cos^\lambda \varphi = 2\cos\lambda\varphi + 2\binom{\lambda}{1}\cos(\lambda-2)\varphi$$
$$+2\binom{\lambda}{2}\cos(\lambda-4)\varphi + 2\binom{\lambda}{3}\cos(\lambda-6)\varphi + \text{etc.}$$

sein, wo man anmerke, dass, sooft λ eine gerade Zahl war, also $\lambda = 2i$, dass das letzte Glied nur

$$1 \cdot \binom{2i}{i}\cos 0\varphi$$

sein wird.

§12 Nachdem also alle Potenzen der Kosinus auf einfache Kosinus reduziert worden sind, werden unsere Integrationen immer auf eine solche Form $\int \varphi\partial \cos i\varphi \cos\lambda\varphi$ zurückgehen, über welche hier besonders zu bemerken ist, dass ihr von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 180^\circ$ erstrecktes Integral stets Null ist, außer im Fall $\lambda = i$. Weil nämlich

$$\cos i\varphi \cos\lambda\varphi = \frac{1}{2}\cos(i+\lambda)\varphi + \frac{1}{2}\cos(i-\lambda)\varphi$$

ist, wird jenes unbestimmte Integral

$$= \frac{\sin(i+\lambda)\varphi}{2(i+\lambda)} + \frac{\sin(i-\lambda)\varphi}{2(i-\lambda)}$$

sein, was für die Grenze $\varphi = 0$ offensichtlich verschwindet; für die andere Grenze $\varphi = 180^\circ = \pi$ hingegen ist es wegen der ganzen Zahlen i und λ hingegen offensichtlich, dass dieses Integral erneut verschwindet, außer im Fall $\lambda = i$. Wenn nämlich $i - \lambda$ als unendlich klein angesehen wird, sei diese Differenz $= \omega$, wird der zweite Teil dieses Integrals

$$\frac{\sin \omega\varphi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}$$

sein, was auch daher klar ist, dass

$$\cos^2 i\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2i\varphi$$

und daher

$$\int \partial\varphi \cos^2 i\varphi = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4i}\sin 2i\varphi = \frac{1}{2}\pi$$

ist.

§13 Um also das gesuchte Integral zu erhalten, wird es genügen, aus der entwickelten Potenz $(1-2b\cos\varphi)^m$ nur die Terme, welche $\cos i\varphi$ enthalten, herausgenommen zu haben, weil alle übrigen nichts beitragen; wenn diese zusammengenommen $N\cos i\varphi$ geben, wird unser ganzes Integral für ☾

$$☾ = (1+aa)^m \cdot \frac{1}{2}N\pi$$

sein; deshalb werden wir uns der Untersuchung aller Anteile der obigen Form widmen, die mit der Formel $\cos i\varphi$ behaftet sind; daher ist es ersichtlich, solange in jenem allgemeinen Term $\pm \left(\frac{m}{\lambda}\right) 2^\lambda b^\lambda \cos^\lambda \varphi$ der Exponent λ kleiner war als i, dass daraus nichts ins Integral eingebracht wird.

§14 Also wird der erste Term, der hier in die Rechnung eingeht,

$$\pm \left(\frac{m}{i}\right) 2^i b^i \cos^i \varphi$$

sein, für welchen das obere Vorzeichen $+$ gelten wird, wenn i eine gerade Zahl war, das untere $-$ hingegen, wenn eine ungerade. Daher geht aber nach der obigen Reduktion

$$2^i \cos^i \varphi = 2\cos i\varphi + \text{etc.}$$

hervor, sodass daher für N der erste Teil $\pm \left(\frac{m}{i}\right) 2b^i$ entspringt. Aber dann entsteht aus dem unmittelbar folgenden Term, welcher

$$\mp \left(\frac{m}{i+1}\right) 2^{i+1} b^{i+1} \cos^{i+1} \varphi$$

sein wird, kein Winkel $i\varphi$, weil

$$2^{i+1} \cos^{i+1} \varphi = 2\cos(i+1)\varphi + 2\left(\frac{i+1}{1}\right)\cos(i-1)\varphi + \text{etc.}$$

ist. Aber der folgende

$$\pm \left(\frac{m}{i+2}\right) 2^{i+2} b^{i+2} \cos^{i+2} \varphi$$

gibt wegen

$$2^{i+2} \cos^{i+2} \varphi = \cos(i+2)\varphi + 2\left(\frac{i+2}{1}\right)\cos i\varphi + \text{etc.}$$

den daraus für den Buchstaben N resultierenden Anteil

$$\pm 2\left(\frac{i+2}{1}\right)\left(\frac{m}{i+2}\right) b^{i+2}.$$

In gleicher Weise entsteht aus dem Fall $\lambda = i+3$ nichts. Aber aus dem folgenden

$$\pm \left(\frac{m}{i+4}\right) 2^{i+4} b^{i+4} \cos^{i+4} \varphi$$

wird wegen

$$2^{i+4} \cos^{i+4} \varphi = 2\cos(i+4)\varphi + 2\left(\frac{i+4}{1}\right)\cos(i+2)\varphi + 2\left(\frac{i+4}{2}\right)\cos i\varphi + \text{etc.}$$

der zum Buchstaben N hinzukommende Teil

$$\pm 2\binom{i+4}{2}\binom{m}{i+4}b^{i+4}$$

sein. Auf dieselbe Weise wird aus dem Fall $\lambda = i+6$ der zum Buchstaben N hinzukommende Teil

$$\pm 2\binom{i+6}{3}\binom{m}{i+6}b^{i+6}$$

sein und so weiter.

§15 Indem man also all diese Teile sammelt, werden wir den vollständigen Wert des Buchstabens N erhalten, welcher

$$N = \pm 2b^i\left(\binom{m}{i} + \binom{i+2}{1}\binom{m}{i+2}b^2 + \binom{i+4}{2}\binom{m}{i+4}b^4 + \binom{i+6}{3}\binom{m}{i+6}b^6 + \text{etc.}\right)$$

sein wird, wo es förderlich sein wird bemerkt zu haben, dass folgendes gilt

$$\begin{aligned}\binom{i+2}{1}\binom{m}{i+2} &= \binom{m}{1}\binom{m-1}{i+1}\\ \binom{i+4}{2}\binom{m}{i+4} &= \binom{m}{2}\binom{m-2}{i+2}\\ \binom{i+6}{3}\binom{m}{i+6} &= \binom{m}{3}\binom{m-3}{i+3}\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Mit diesen Werten wird also

$$N = \pm 2b^i\left(\binom{m}{0}\binom{m}{i} + \binom{m}{1}\binom{m-1}{i+1}b^2 + \binom{m}{2}\binom{m-2}{i+2}b^4 + \binom{m}{3}\binom{m-3}{i+3}b^6 + \text{etc.}\right)$$

sein, nach Finden welches Wertes unser gesuchtes Integral

$$☾ = \pm\pi(1+aa)^m b^i\left(\binom{m}{0}\binom{m}{i} + \binom{m}{1}\binom{m-1}{i+1}b^2 + \text{etc.}\right)$$

sein wird, welche Reihe offensichtlich abbricht, sooft m eine positive ganze Zahl war. Sobald nämlich in diesem Symbol $\binom{m-\lambda}{i+\lambda}$ der Nenner $i+\lambda$ den Zähler $m-\lambda$ zu übersteigen beginnt, wird sein Wert verschwinden.

§16 Um aber diesen Ausdruck des Integrals auf den Buchstaben a allein zurückzuführen, wie er in unserem Theorem oben dargestellt worden ist, wollen wir hier anstelle von b wieder den angenommenen Wert $\frac{a}{1+aa}$ einsetzen und es wird

$$☾ = \pm\pi a^i (1+aa)^{m-i} \left\{ \begin{gathered} \left(\frac{m}{0}\right)\left(\frac{m}{i}\right) + \left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{m-1}{i+1}\right)\frac{a^2}{(1+aa)^2} \\ + \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{m-2}{i+2}\right)\frac{a^4}{(1+aa)^4} + \text{etc.} \end{gathered} \right\}$$

werden, wo, um die oben gegebene Form zu finden, die Potenzen von $1+aa$ entwickelt werden müssen. Für dieses Ziel wollen wir

$$☾ = \pm\pi a^i A$$

setzen, sodass nun

$$A = \left(\frac{m}{0}\right)\left(\frac{m}{i}\right)(1+aa)^{m-i} + \left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{m-1}{i+1}\right)a^2(1+aa)^{m-i-2}$$
$$+ \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{m-2}{i+2}\right)a^4(1+aa)^{m-i-4} + \left(\frac{m}{3}\right)\left(\frac{m-3}{i+3}\right)a^6(1+aa)^{m-i-6} + \text{etc.}$$

ist. Aber nach der Entwicklung dieser Potenzen werde

$$A = \alpha + \beta a^2 + \gamma a^4 + \delta a^6 + \varepsilon a^8 + \zeta a^{10} + \eta a^{12} + \text{etc},$$

die Werte welcher Buchstaben α, β, γ, δ etc. wir ausfindig machen wollen.

§17 Zuerst ist freilich sofort klar, dass

$$\alpha = \left(\frac{m}{0}\right)\left(\frac{m}{i}\right)$$

ist; darauf wird man aber

$$\beta = \left(\frac{m}{0}\right)\left(\frac{m}{i}\right)\left(\frac{m-i}{1}\right) + \left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{m-1}{i+1}\right)$$

finden. Der zweite Teil durch den ersten geteilt liefert nach Entwicklung

$$\frac{m-i-1}{i+1},$$

nach Bemerken wovon

$$\beta = \frac{m}{i+1}\left(\frac{m}{0}\right)\left(\frac{m}{i}\right)\left(\frac{m-i}{1}\right)$$

sein wird, was zurückgeführt wird auf

$$\beta = \left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{m}{i+1}\right).$$

In gleicher Weise wird der Buchstabe γ aus drei Teilen bestehen; es wird nämlich

$$\gamma = \left(\frac{m}{0}\right)\left(\frac{m}{i}\right)\left(\frac{m-i}{2}\right) + \left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{m-1}{i+1}\right)\left(\frac{m-i-2}{1}\right) + \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{m-2}{i+2}\right)$$

sein, wo der zweite Teil durch den ersten geteilt

$$\frac{2(m-i-2)}{i+1}$$

gibt. Aber der dritte Term durch den ersten geteilt liefert

$$\frac{(m-i-2)(m-i-3)}{(i+1)(i+2)},$$

woher

$$\gamma = \left(1 + \frac{2(m-i-2)}{i+1} + \frac{(m-i-2)(m-i-3)}{(i+1)(i+2)}\right)\left(\frac{m}{0}\right)\left(\frac{m}{i}\right)\left(\frac{m-i}{2}\right)$$

wird. Andererseits ist

$$1 + \frac{m-i-2}{i+1} = \frac{m-1}{i+1}$$

und

$$\left(\frac{m-i-2}{i+1}\right)\left(1 + \frac{m-i-3}{i+2}\right) = \frac{m-1}{i+2} \cdot \frac{m-i-2}{i+1},$$

woher man

$$\gamma = \frac{m-1}{i+1} \cdot \frac{m}{i+2} \binom{m}{0} \binom{m}{i} \binom{m-i}{2}$$

berechnet, welcher Ausdruck zu diesem zusammengezogen wird

$$\binom{m}{2} \binom{m}{i+2}.$$

§18 Weil also

$$\alpha = \binom{m}{0} \binom{m}{i}, \quad \beta = \binom{m}{1} \binom{m}{i+1}, \quad \gamma = \binom{m}{2} \binom{m}{i+2}$$

ist, ließe sich daraus schon mit ziemlicher Sicherheit schließen, dass

$$\delta = \binom{m}{3} \binom{m}{i+3}, \quad \varepsilon = \binom{m}{4} \binom{m}{i+4} \quad \text{etc.}$$

sein wird. Aber damit wir hier nicht irgendetwas allein auf Vermutung oder Induktion fußen, wollen wir für den Wert des Buchstabens A im Allgemeinen den Koeffizienten der unbestimmten Potenz $a^{2\lambda}$ ausfindig machen, welchen wir Λ nennen wollen, und es wird

$$\Lambda = \binom{m}{0} \binom{m}{i} \binom{m-i}{\lambda} + \binom{m}{1} \binom{m-1}{i+1} \binom{m-i-2}{\lambda-1} + \binom{m}{2} \binom{m-2}{i+2} \binom{m-i-4}{\lambda-2} + \binom{m}{3} \binom{m-3}{i+3} \binom{m-i-6}{\lambda-3} + \text{etc.}$$

sein.

§19 Die einzelnen Terme dieser für Λ gefundenen Reihe lassen sich in dieser allgemeinen Form erfassen

$$\binom{m}{\theta} \binom{m-\theta}{i+\theta} \binom{m-i-2\theta}{\lambda-\theta},$$

welche ausmultipliziert in diese Form verwandelt wird

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-i-\lambda-\theta+1)}{1\cdot 2\cdots \theta \times 1\cdot 2\cdots(i+\theta) \times 1\cdot 2\cdots(\lambda-\theta)},$$

wo von m beginnend die Faktoren des Zählers ununterbrochen um eine Einheit schrumpfen werden bis hin zum letzten

$$(m - i - \lambda - \theta + 1).$$

Diesen Bruch erweitere man nun mit diesem Produkt

$$\lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - \theta + 1)$$

und es wird dieser Bruch hervorgehen

$$\frac{\lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - \theta + 1) \times m(m-1) \cdots (m - i - \lambda - \theta + 1)}{1 \cdot 2 \cdots \theta \times 1 \cdot 2 \cdots (i + \theta) \times 1 \cdot 2 \cdots \lambda},$$

in welchem zuerst das Symbol $\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)$ enthalten ist, dann ist dort aber auch das Symbol $\left(\frac{m}{\lambda}\right)$ enthalten; was zurückbleibt, wird das Symbol $\left(\frac{m-\lambda}{i+\theta}\right)$ geben und so wird Λ die allgemeine Form

$$= \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)\left(\frac{m}{\lambda}\right)\left(\frac{m-\lambda}{i+\theta}\right)$$

haben. Wenn wir also anstelle von θ nacheinander die Werte $0, 1, 2, 3$ etc. schreiben, weil in den einzelnen Termen der gemeinsame Faktor $\left(\frac{m}{\lambda}\right)$ enthalten ist, wird der Wert des Buchstabens

$$\Lambda = \left(\frac{m}{\lambda}\right)\left(\left(\frac{\lambda}{0}\right)\left(\frac{m-\lambda}{i}\right) + \left(\frac{\lambda}{1}\right)\left(\frac{m-\lambda}{i+1}\right) + \left(\frac{\lambda}{2}\right)\left(\frac{m-\lambda}{i+2}\right) + \text{etc.}\right)$$

sein. Aber ich habe vor einiger Zeit bewiesen, dass die Summer dieser ähnlichen Reihe

$$\left(\frac{p}{0}\right)\left(\frac{q}{r}\right) + \left(\frac{p}{1}\right)\left(\frac{q}{r+1}\right) + \left(\frac{p}{2}\right)\left(\frac{q}{r+2}\right) + \left(\frac{p}{3}\right)\left(\frac{q}{r+3}\right) + \text{etc.}$$

immer

$$= \left(\frac{p+q}{p+r}\right) = \left(\frac{p+q}{q-r}\right)$$

ist. Also wird nach der Anwendung

$$p = \lambda, \quad q = m - \lambda, \quad r = i$$

sein und so werden wir in einem endlichen Ausdruck

$$\Lambda = \left(\frac{m}{\lambda}\right)\left(\frac{m}{\lambda + i}\right) = \left(\frac{m}{\lambda}\right)\left(\frac{m}{m - \lambda - i}\right)$$

haben; dies ist der Beweis der oben erwähnten und aus den Werten α, β, γ etc. gefolgerten Vermutung.

§20 Wenn wir hier nun nacheinander anstelle von λ die Zahlen 0, 1, 2, 3 etc. schreiben, werden wir den wahren Wert der Reihe erhalten, welche wir oben mit dem Buchstaben A erfasst haben; es wird natürlich

$$A = \left(\frac{m}{0}\right)\left(\frac{m}{i}\right) + \left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{m}{i+1}\right)a^2 + \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{m}{i+2}\right)a^4 + \left(\frac{m}{3}\right)\left(\frac{m}{i+3}\right)a^6 + \text{etc.}$$

sein und daher wird der Wert der mit dem Zeichen ☾ angezeigten Integralformel

$$☾ = \pm\pi a^i \left(\left(\frac{m}{0}\right)\left(\frac{m}{i}\right) + \left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{m}{i+1}\right)a^2 + \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{m}{i+2}\right)a^4 + \text{etc.}\right)$$

sein, welcher Ausdruck natürlich immer abbricht, sooft m eine ganze positive Zahl ist. Hier muss man sich aber daran erinnern, dass das obere der doppeldeutigen Vorzeichen $\pm$ Geltung hat, wannimmer i eine gerade Zahl war, das untere hingegen, wenn eine ungerade.

Dritter Teil des Beweises

§21 Diese Form, welche wir hier für den Integralwert ☾ erhalten haben, ist sogar einfacher als die, die uns unser Theorem an die Hand gegeben hatte, welche natürlich, wenn wir anstelle von ♂ die Reihe, die es bezeichnet, schreiben,

$$☾ = \frac{\pi a^i \left(\frac{m}{i}\right)}{\left(\frac{-m-i}{i}\right)}\left(\left(\frac{m-i}{0}\right)\left(\frac{m+i}{i}\right) + \left(\frac{m-i}{1}\right)\left(\frac{m+i}{i+1}\right)a^2 + \left(\frac{m-i}{2}\right)\left(\frac{m+i}{i+2}\right)a^4 + \text{etc.}\right)$$

sein wird. Es ist also übrig, dass wir die vollkommene Übereinstimmung zwischen diesen zwei sich in der Art deutlich voneinander unterscheidenden

Ausdrücke zeigen. Hier wird es aber besonders förderlich sein bemerkt zu haben, dass

$$\binom{-m-1}{i} = \pm\binom{m+i}{i}$$

ist, weil wir ja oben in § 2 schon beobachtet haben, dass im Allgemeinen

$$\binom{-p}{q} = \pm\binom{p+q-1}{q}$$

ist, wo das obere Vorzeichen gilt, wenn q eine gerade Zahl war, das untere hingegen, wenn eine ungerade; nachdem dies bemerkt worden ist, wird die letzte für ☾ gefundene Form

$$☾ = \pm\frac{\pi a^i \binom{m}{i}}{\binom{m+i}{i}}\left(\binom{m-i}{0}\binom{m+i}{i} + \binom{m-i}{1}\binom{m+i}{i+1}a^2 + \text{etc.}\right)$$

sein.

§22 Weil ja nun die beiden Formen mit dem mehrdeutigen Vorzeichen $\pm$ versehen sind, haben wir noch zu beweisen, wenn wir jede der beiden Ausdrücke mit $\binom{m+i}{i}$ multiplizieren, dass die zwei folgenden Reihen einander vollkommen gleich sind

I. $\binom{m}{0}\binom{m}{i}\binom{m+i}{i} + \binom{m}{1}\binom{m}{i+1}\binom{m+i}{i}a^2 + \binom{m}{2}\binom{m}{i+2}\binom{m+i}{i}a^4 + \text{etc.}$

II. $\binom{m-i}{0}\binom{m+i}{i}\binom{m}{i} + \binom{m-i}{1}\binom{m+i}{i+1}\binom{m}{i}a^2 + \binom{m-i}{2}\binom{m+i}{i+2}\binom{m}{i}a^4 + \text{etc.},$

wo sich die Gleichheit der ersten Terme wegen

$$\binom{m}{0} \quad \text{und} \quad \binom{m-i}{0} = 1$$

von selbst zeigt; weiter wird auch ohne Mühe die Gleichheit zwischen den folgenden mit aa behafteten Term gezeigt werden können und in gleicher Weise ist dasselbe auch über die folgenden festzuhalten.

§23 Aber damit wir hier nicht gezwungen sind Induktion zu benutzen, wollen wir die Übereinstimmung der beiden Term bei derselben Potenz $a^{2\lambda}$ beweisen. In der ersten Reihe hat diese Potenz $a^{2\lambda}$ diesen Koeffizienten

$$\left(\frac{m}{\lambda}\right)\left(\frac{m}{i+\lambda}\right)\left(\frac{m+i}{i}\right);$$

in der anderen ist der Koeffizient derselben hingegen

$$\left(\frac{m-i}{\lambda}\right)\left(\frac{m+i}{i+\lambda}\right)\left(\frac{m}{i}\right).$$

Man entwickle nun jeden der beiden in einfache Faktoren und der erste führt zu diesem Bruch

$$\frac{m\cdots(m-\lambda+1)\times m\cdots(m-i-\lambda+1)\times(m+i)\cdots(m+1)}{1\cdot 2\cdots\lambda\times 1\cdot 2\cdots(i+\lambda)\times 1\cdot 2\cdots i},$$

der zweite liefert hingegen diesen

$$\frac{(m-i)\cdots(m-i-\lambda+1)\times(m+i)\cdots(m-\lambda+1)\times m\cdots(m-i+1)}{1\cdot 2\cdots\lambda\times 1\cdot 2\cdots(i+\lambda)\times 1\cdot 2\cdots i};$$

hier sind die Nenner bei beiden Ausdrücke offenbar dieselben, sodass nur die Gleichheit zwischen den Zählern zu beweisen ist.

§24 Im ersten Zähler liefert der dritte allgemeine Faktor mit dem ersten verbunden aber dieses Produkt

$$(m+i)\cdots(m-\lambda+1),$$

welcher auch in der zweiten Form auftaucht; nachdem diese also weggeschafft worden sind, muss die Gleichheit zwischen den restlichen Teilen gezeigt werden, welche in der ersten Form

$$m\cdots(m-i-\lambda+1)$$

sind, in der anderen hingegen

$$m\cdots(m-i+1)\times(m-i)\cdots(m-i-\lambda+1),$$

welche Gleichheit nun wieder offensichtlich ist. So ist also die Gültigkeit unseres Lehrsatzes, den wir zu beweisen unternommen haben, nun streng für die Integralformel

$$☾ = \int \partial\varphi \cos i\varphi (1 + aa - 2a\cos\varphi)^n \begin{bmatrix} \text{von} & \varphi = 0 \\ \text{bis} & \varphi = 180^\circ \end{bmatrix}$$

vor Augen geführt worden.

Vierter Teil des Beweises

§25 Nachdem der Wert der Formel ☾ gefunden worden ist, ist der ganze Beweis als schon erbracht anzusehen, weil er ja schon zu Beginn aus dem Wert der Formel ☉ richtig abgeleitet worden ist. Dennoch wird es indes gefällig sein, dass auch umgekehrt aus dem Wert ☾ der andere Wert ☉ hergeleitet wird. Wir wollen aber die einfachere Form von ☾ gebrauchen, zu welchem Wert uns der Beweis selbst uns direkt geführt hat, welcher

$$☾ = \pm\pi a^i \left(\binom{m}{0}\binom{m}{i} + \binom{m}{1}\binom{m}{i+1} a^2 + \binom{m}{2}\binom{m}{i+2} a^4 + \text{etc.} \right)$$

war, wo das obere Zeichen gilt, wenn i eine gerade Zahl war, das untere, wenn eine ungerade.

§26 Aus diesem Wert der Formel ☾ wird der Wert der anderen Formel ☉ abgeleitet, wenn wir $-n-1$ anstelle von m schreiben, welcher Wert also deswegen

$$☉ = \pi a^i \left\{ \begin{array}{c} \binom{-n-1}{0}\binom{-n-1}{i} + \binom{-n-1}{1}\binom{n-1}{i+1} a^2 \\ + \binom{-n-1}{2}\binom{-n-1}{i+2} a^4 + \text{etc.} \end{array} \right\},$$

sein wird, welche Reihe aber nun eine unendliche ist, wenn freilich n eine ganze positive Zahl war; deswegen muss diese Reihe in eine andere umgewandelt werden, die abbricht, sooft n eine ganze positive Zahl ist, was mithilfe des eingangs oben erwähnten Lemmas geleistet werden können wird.

§27 Wir wollen die hier gefundene Reihe also mit der Reihe ♄ im Lemma vergleichen, was durch Setzen von

$$f = -n - 1, \quad h = -n - 1 \quad \text{und} \quad e = i$$

geschieht, sodass nun $\odot = \pm \pi a^i$♄ ist. Aus diesen Werten wird aber die andere mit dem Zeichen ♂ notierte wegen

$$-h - 1 = n, \quad -f - 1 = n \quad \text{und} \quad x = a^2$$

entsprechend

$$♂ = \left(\frac{n}{0}\right)\left(\frac{n}{i}\right) + \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n}{i+1}\right)a^2 + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{i+2}\right)a^4 + \text{etc.}$$

werden. Aber die Relation zwischen diesen zwei Reihen wird

$$\left(\frac{i-n-1}{i}\right) ♄ = \frac{\left(\frac{n+i}{i}\right) ♂}{(1-aa)^{2n+1}}$$

sein; hier bemerke man, weil wir schon oben beobachtet haben, dass

$$\left(\frac{-p}{q}\right) = \pm \left(\frac{p+q-1}{q}\right)$$

ist, dass hier

$$\left(\frac{-n-1+i}{i}\right) = \pm \left(\frac{n}{i}\right)$$

sein wird; hier gilt wiederum das obere Vorzeichen, wenn i eine gerade Zahl war. Daher wird also

$$♄ = \pm \frac{\left(\frac{n+i}{i}\right) ♂}{\left(\frac{n}{i}\right)(1-aa)^{2n+1}}$$

sein.

§28 Man setze nun also diesen Wert anstelle von ♄ ein, in welchem Mehrdeutigkeit der Vorzeichen aus der Betrachtung herausgeworfen werden wird; anstelle von ♂ schreibe man aber die gerade gegebene Reihe und wir werden für $\odot$ den folgenden Ausdruck erhalten

$$\odot = \frac{\pi a^i \binom{n+i}{i}}{\binom{n}{i}(1-aa)^{2n+1}} \left(\binom{n}{0}\binom{n}{i} + \binom{n}{1}\binom{n}{i} a^2 + \binom{n}{2}\binom{n}{i+2} a^4 + \text{etc.} \right),$$

welche Reihe natürlich immer abbricht, sooft n eine ganze positive Zahl war; aber dennoch hat sie diesen Mangel, dass sie in den Fällen, in denen $n < i$ ist, wegen $\binom{n}{i} = 0$ unendlich zu werden scheint. Aber es ist zu bemerken, dass in diesen Fällen auch alle Terme der Reihe ♂ verschwinden; daher ist es notwendig, dass wir auch nach dem wahren Wert des ganzen Ausdrucks suchen. Aber in den übrigen Fällen, in denen $n > i$ ist, scheint dieser Ausdruck sogar jenem, welchem wir im Theorem gegeben haben, vorzuziehen sein.

§29 Es muss also gezeigt werden, dass alle Terme unserer Reihe so transformiert werden können, dass sie eine Teilung durch den Nenner $\binom{n}{i}$ zulassen. Aber jeder beliebige Term unserer Reihe ist in dieser Form $\binom{n}{\lambda}\binom{n}{i+\lambda}$ enthalten, welcher mit dem gemeinsamen Faktor multipliziert zu

$$\binom{n+i}{i}\binom{n}{\lambda}\binom{n}{i+\lambda}$$

wird, welcher in Faktoren entwickelt auf diesen Bruch zurückgeführt wird

$$\frac{(n+i)\cdots(n+1) \times n\cdots(n-\lambda+1) \times n\cdots(n-i-\lambda+1)}{1\cdot 2\cdots i \times 1\cdot 2\cdots \lambda \times 1\cdot 2\cdots(i+\lambda)},$$

wo so der Zähler wie der Nenner drei wesentliche Faktoren hat; aber die einzelnen Faktoren schrumpfen im Zähler stetig um eine Einheit, in Nenner wachsen sie hingegen um eine Einheit. Weil also

$$\binom{n}{i} = \frac{n\cdots(n-i+1)}{1\cdot 2\cdots i}$$

ist, wird der obige Bruch durch diesen geteilt wegen

$$\frac{n\cdots(n-i-\lambda+1)}{n\cdots(n-i+1)} = (n-i)\cdots(n-i-\lambda+1)$$

als

$$\frac{(n+i)\cdots(n+1) \times n\cdots(n-\lambda+1) \times (n-i)\cdots(n-i-\lambda+1)}{1\cdot 2\cdots \lambda \times 1\cdot 2\cdots(i+\lambda)}$$

hervorgehen, welcher offensichtlich in diesen übergeht (wegen der zusammenhängenden ersten Faktoren)

$$\frac{(n-i)\cdots(n-\lambda+1)\times(n-i)\cdots(n-i-\lambda+1)}{1\cdot 2\cdots\lambda\times 1\cdot 2\cdots(i+\lambda)},$$

sodass nach Reduktion von allen auf die Symbole die allgemeine Form eines jeden Terms

$$=\left(\frac{n+i}{i+\lambda}\right)\left(\frac{n-i}{\lambda}\right)$$

ist.

§30 Nun schreibe man also anstelle von λ nacheinander die Werte 0, 1, 2, 3 etc. und der Wert der Integralformel $\odot$ wird hervorgehen, genauso wie er im Theorem angegeben worden ist, nämlich als

$$\odot=\frac{\pi a^i}{(1-aa)^{2n+1}}\left(\left(\frac{n-i}{0}\right)\left(\frac{n+i}{i}\right)+\left(\frac{n-i}{1}\right)\left(\frac{n+i}{i+1}\right)a^2+\left(\frac{n-i}{2}\right)\left(\frac{n+i}{i+2}\right)a^4+\text{etc.}\right),$$

welcher Ausdruck nicht nur immer abbricht, sooft n eine ganze positive Zahl war, sondern keinen Mangel mehr aufweist, weil er in allen Fällen einen bestimmten Wert von $\odot$ darbietet, und so ist unser Theorem, was zuvor nur allein auf eine Vermutung gestützt war, mit einem sehr strengen Beweis untermauert worden.